תורת הקבוצות, תרגיל 11

1. תהיינה A, B קבוצות סדורות היטב.
   א. הוכח, כי אם $f : A \to A$ שומרת סדר אז f היא פונקציית הזהות.
   ב. הוכח, כי אם A ו- B איזומורפיות אז קיים איזומורפיזם יחיד $f : A \to B$.

2. א. הוכח, כי קבוצה A הינה סדורה היטב אם ורק אם כל רישא אמיתית שלה (כלומר, רישא שלה שהיא קבוצה חלקית ממש) נקבעת על ידי איבר, כלומר, כל רישא אמיתית היא מהצורה $\{x \in A | x < y\}$ עבור $y \in A$ מסוים.
   ב. כידוע, קבוצת המספרים השלמים $\mathcal{Z}$ אינה סדורה היטב. מצא רישא אמיתית שלה שאינה נקבעת ע"י איבר.

3. א. הוכח, כי אם הקבוצות A, B סדורות היטב אז הקבוצה $A \times B$ סדורה היטב ע"י יחס הסדר הלקסיקוגרפי (כלומר, היחס $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ אם ורק אם $a_1 < a_2$ או ($a_1 = a_2$ וגם $b_1 < b_2$).
   ב. תהי A קבוצה סדורה היטב. תהי A' קבוצת הסדרות הסופיות של איברי A. מצא סדר טוב על A'.

4. א. תהי A קבוצה סדורה היטב. הוכח, כי לכל איבר $a \in A$, או ש- a מקסימלי ב- A או שיש לו עוקב יחיד ב- A, כלומר קיים $b \in A$ כך, ש- $a < b$ ולכל $c \in A$ כך, ש- $a < c$ מתקיים $b \leq c$.
   ב. [רשות] תהי A קבוצת מספרים ממשיים כך שהסדר המושרה על A ע"י הסדר הרגיל על הממשיים הינו סדר טוב על A. הוכח, כי A סופית או בת מניה.
   הערה: בסעיף זה מותר להשתמש באקסיומת הבחירה.

תאריך ההגשה: 5.1.2005